

# 400 m 跑优秀运动员数学模型的建立及应用

陶江<sup>1</sup>, 李娟<sup>2</sup>, 马时忍<sup>3</sup>

(1. 湖北大学 体育学院; 2. 湖北大学 数学与计算机学院; 3. 湖北省田径管理中心, 湖北 武汉 430062)

**摘要:**以世界优秀田径运动员为例,分析了决定400 m短跑的各种因素以及它们所占的比重,并据此建立了数学模型,从而将以往的定性分析转化成定量分析。帮助教练和运动员准确而快捷地根据400 m优秀运动员的模式并结合自身的特点来合理分配体力和时间,以取得更好成绩。

**关键词:**400 m 跑; 数学模型; 层次分析法; 权重

**中图分类号:**G822.1 **文献标识码:**A **文章编号:**1006-7116(2006)03-0119-03

## The establishment and application of a mathematical model of excellent 400 m run athletes

TAO Jiang<sup>1</sup>, LI Juan<sup>2</sup>, MA Shi-ren<sup>3</sup>

(1. College of Physical Education, Hubei University; 2. Faculty of Mathematics & Computer Science, Hubei University; 3. Hubei Provincial Track & Field Administration Center, Wuhan 430062, China)

**Abstract:** By using the world excellent track and field athletes as their prototype, the authors analyzed and determined various factors in 400m run and their weights, thus establishing a mathematical model, which turns previous qualitative analysis into quantitative analysis and will help coaches and athletes distribute physical strength and time rationally to have a better performance by referring to the mode of excellent 400 m run athletes and combining it with their own characteristics.

**Key words:** 400 m run; mathematical model; AHP approach; weighing

在世界短跑比赛中如何取得好成绩,是每个运动员最关心的事情,因此如何从优秀运动员那里准确而快捷地吸取经验,调动短跑训练中的积极因素,成为一个运动员成功的关键,同时也是教练们训练成败的关键。在这方面,由于数学在各行各业日益广泛而且准确地应用,成功地用数学模型形象而准确地描述影响短跑成绩中的时间、速度、加速度甚至体能等各种因素之间的关系,已经成为可能。本研究以1999年第七届世界田径锦标赛400 m跑项目中男、女前3名共6名国际级健将为对象,采用层次分析法来寻找400 m跑制胜的关键因素,并预测运动员的成绩。一般来说,400 m短跑运动员的起跑的反应时间,运动员整个过程中的加速时间、减速时间,体能的最优应用(何时加速、何时减速、何时达到最大速度),都对最终成绩有重要影响。有经验的运动员都知道这些因素是环环相扣的。如何清晰、科学地描述这些因素之间的关系,以及各自的权重,将是我们建模要解决的重点问题。

### 1 第一个模型的建立

采用AHP法(层次分析法),将“400 m短跑取得好成绩”作为我们的“目标层”(O),将影响成绩的各个因素作为“准

则层”(C),包括反应时间(C<sub>1</sub>)、加速时间(C<sub>2</sub>)、减速时间(C<sub>3</sub>)、全程平均速度(C<sub>4</sub>)和耐力(C<sub>5</sub>)。分析对“目标层”的影响程度的大小(各自的权重),来寻找短跑制胜的关键因素。

在此暂时对400 m短跑中的各个因素(即准则层)和目标层加以分析,建立模型。至于方案层(即各个因素中的小的影响因素),可以用同样的方法另加一行。由于在此模型中这些更细的因素不会影响我们的分析,故暂不考虑。

设5个影响400 m短跑成绩因素:反应时间C<sub>1</sub>;加速时间C<sub>2</sub>;减速时间C<sub>3</sub>;全程平均速度C<sub>4</sub>;耐力C<sub>5</sub>。比较C层5个因素对目标层O的影响,采用成对比较得到400 m短跑成绩成对比较判断矩阵如下:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 & 1/9 & 1/5 \\ 3 & 1 & 2 & 1/3 & 1/2 \\ 2 & 1/2 & 1 & 1/6 & 1/3 \\ 9 & 3 & 6 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} = A = (a_{ij})_{5 \times 5} \quad (1)$$

式(1)中a<sub>12</sub>是反映时间C<sub>1</sub>与C<sub>2</sub>各自对400 m短跑成

绩影响的权重之比。 $a_{13}$ 、 $a_{14}$ ……依此类推,此矩阵通过了一致性检验。

式(1)中重要性标度  $c_{ij}$  含义如表 1 所示。

表 1 判断矩阵重要性标度及其含义

重要性标度	含义
1	表示因素 $c_i$ 与 $c_j$ 比较,具有同等重要或优先
3	表示因素 $c_i$ 与 $c_j$ 比较, $c_i$ 比 $c_j$ 稍微重要或优先
5	表示因素 $c_i$ 与 $c_j$ 比较, $c_i$ 比 $c_j$ 明显重要或优先
7	表示因素 $c_i$ 与 $c_j$ 比较, $c_i$ 比 $c_j$ 强烈重要或优先
9	表示因素 $c_i$ 与 $c_j$ 比较, $c_i$ 比 $c_j$ 极端重要或优先
2,4,6,8	2,4,6,8 分别表示相邻判断 1-3,3-5,5-7,7-9 的中值
倒数	表示 $c_i$ 与 $c_j$ 比较得判断 $c_{ij}$ ,则 $c_j$ 与 $c_i$ 比较得判断 $c_{ji} = 1/c_{ij}$

模型求解:由式(1)算出矩阵  $A$  的特征值、一致指标  $CI$ 、一致性比率  $CR$ ,见表 2。

表 2 矩阵  $A$  的特征值及权重值

准则层	$C$ 对 $O$ 的权重 ( $w$ )	特征值 ( $\lambda_{max}$ )	一致性指标 ( $CI$ )	一致性比率 ( $CR$ )
$C_1$	0.048	5.016 8	0.004 2	0.003 75
$C_2$	0.148			
$C_3$	0.083			
$C_4$	0.468			
$C_5$	0.253			

对于表 2 中所得权重值  $w$  的可信度和准确性,还需要进行一致性检验。衡量一致性指标  $CI$ (consistent index)定义为:

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}, \text{ 其中 } n \text{ 为矩阵 } A \text{ 的阶数。}$$

为了得到一个对不同阶数判断矩阵均适用的一致性检验的临界值,还必须考虑一致性与矩阵阶数之间的关系,即需要根据判断矩阵的阶数对一致性指标  $CI$  进行修正。用随机一致性指标  $RI$  修正  $CI$ 。表 3 是不同阶数的随机一致性指标( $RI$ )的值。

表 3 随机一致性指标( $RI$ 值)

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$RI$	0	0	0.51	0.89	1.11	1.25	1.35	1.42	1.46	1.49

$CI$  与  $RI$  之比称为一致性比率,记为  $CR$ 。当  $CR < 0.10$  时,认为判断矩阵的不一致性在容许范围之内,即矩阵  $A$  通过一致性检验。

计算结果为: $\lambda_{max} = 5.016 8, CI = 0.004 2, CR = 0.003 75 < 0.10$ ,说明以上计算得出的( $w$ )权重可以作为评价指标。

模型分析:由表 3 中数据可知  $CR < 0.10$ ,即此模型中的判断矩阵通过了一致性检验,符合要求。由表 2 中各权重值可看到,400 m 短跑取胜的关键在于全程的平均速度保持领

先水平,运动员在后阶段的耐力以保持较多的能量跑完全程。此外,开始阶段,在尽可能短的时间获得较大的速度,对比赛起着重要的作用。

模型检验:以 1999 年第七届世界锦标赛为例。男子 400 m 冠军、美国运动员迈克尔·约翰逊以 43.18 s 的成绩打破他本人保持的世界纪录 43.29 s。比第 2 名帕雷拉领先 1.11 s。由 50 m 分段平均速度表(表 4)可以明显看到,他在 200~400 m 的速度明显高于其他的运动员。而在比赛约 200 m 的位置,迈克尔·约翰逊仅在第 3 位,成绩是 21.22 s。而到了 250 m 处,他却领先帕雷拉。显然他以杰出的平均速度超过了所有对手,获得了第 1 名。约翰逊的反应时间是 0.15 s,处于第 3 位。由此可以看出在 400 m 短跑中,较高的平均速度才是取胜的关键因素。此外,合理分配体能,保持良好的耐力对于比赛成绩也有非常重要的影响。

表 4 男、女子前 3 名 400 m 决赛各 50 m 分段处累计时间 s

姓名	50 m	100 m	150 m	200 m	250 m	300 m	350 m	400 m
约翰逊	6.14	11.10	16.10	21.22	26.42	31.66	37.18	43.18
帕雷拉	6.22	11.12	16.03	21.13	26.54	32.10	37.93	44.29
卡德拉斯	6.00	10.99	16.00	21.18	26.57	32.10	37.96	44.30
弗里曼	6.56	12.19	17.87	23.79	29.87	35.97	42.50	49.67
拉克	6.80	12.41	18.10	24.03	30.09	36.21	42.66	49.74
格拉汉姆	6.61	12.11	17.73	23.59	29.78	36.12	42.72	49.92

以上分析了影响 400 m 短跑成绩的各种因素以及他们所占的比重。

## 2 第二个模型的建立

为了更进一步了解训练中各种因素所起作用,让教练员准确而直观地把握在训练中如何训练队员,什么时间、地点加速,什么时间地点达到最大速度,减速时间和地点等。同时让教练员和运动员都能准确而快捷地根据优秀运动员的赛跑模式并结合自身的特点来合理分配体力和时间,从而更好、更快地提高自己的水平,取得更好的成绩,为此,我们建立第 2 个模型。

我们要做的是找出运动员在短跑中的路程、速度、加速度、时间之间的关系。即函数  $S(t)$ 、 $V(t)$ 、 $a(t)$ 。这样我们将对运动员赛跑中的情况了如指掌,何时跑到何地,何时何地加速、最大速度等,在此模型中独立变量是时间  $t$ ,相关变量是路程  $S$ ,速度  $V$ ,加速度  $a$ 。我们根据数据,建立他们之间的函数关系,则运动的全过程就清楚了。需要指出的是,参考的资料中,速度是每 50 m 的平均速度,而不是各个时刻的速度,因此回避直接建立速度与时间的函数,而路程和时间的关系是准确无误的,因此我们只建立路程与时间的函数,再用数学方法求出另外两个。

用 1999 年世界锦标赛 400 m 中男女优秀运动员的各项数据获得一个运动员赛跑的模型。

$$S(t) = at + b$$

下面是将男女前 3 名运动员的路程  $S$  与时间  $t$  输入后,利用 EXCEL 中的回归分析模块得到的路程(这里把位移与路程同等看待)与时间的函数。其中  $a$ 、 $b$  都是常数,且由于各运动员在各段的成绩不同(见表 4),模型结果中  $a$ 、 $b$  的数值因人而异,模型中各运动员参数如下:

男子 约翰逊:  $S(t) = 9.5039 \times t - 4.28234$   
 帕雷拉:  $S(t) = 9.2297 \times t - 0.3891$   
 卡德拉斯:  $S(t) = 9.2058 \times t - 0.1834$   
 女子 弗里曼:  $S(t) = 8.1647 \times t + 2.0841$   
 拉克:  $S(t) = 8.1577 \times t + 1.7829$   
 格拉汉姆:  $S(t) = 8.0996 \times t + 3.6997$

很明显他们的路程与时间成线性函数。我们再由数学公式  $ds/dt = V, dv/dt = a$  得到速度与加速度的函数关系。但由于材料中所给的速度是平均速度,函数在此不是特别准确,这个问题可以通过无限细分路程求平均速度解决,当然在此我们可以直接给出男女前 3 名运动员的  $V-t$  图(见图 1)。

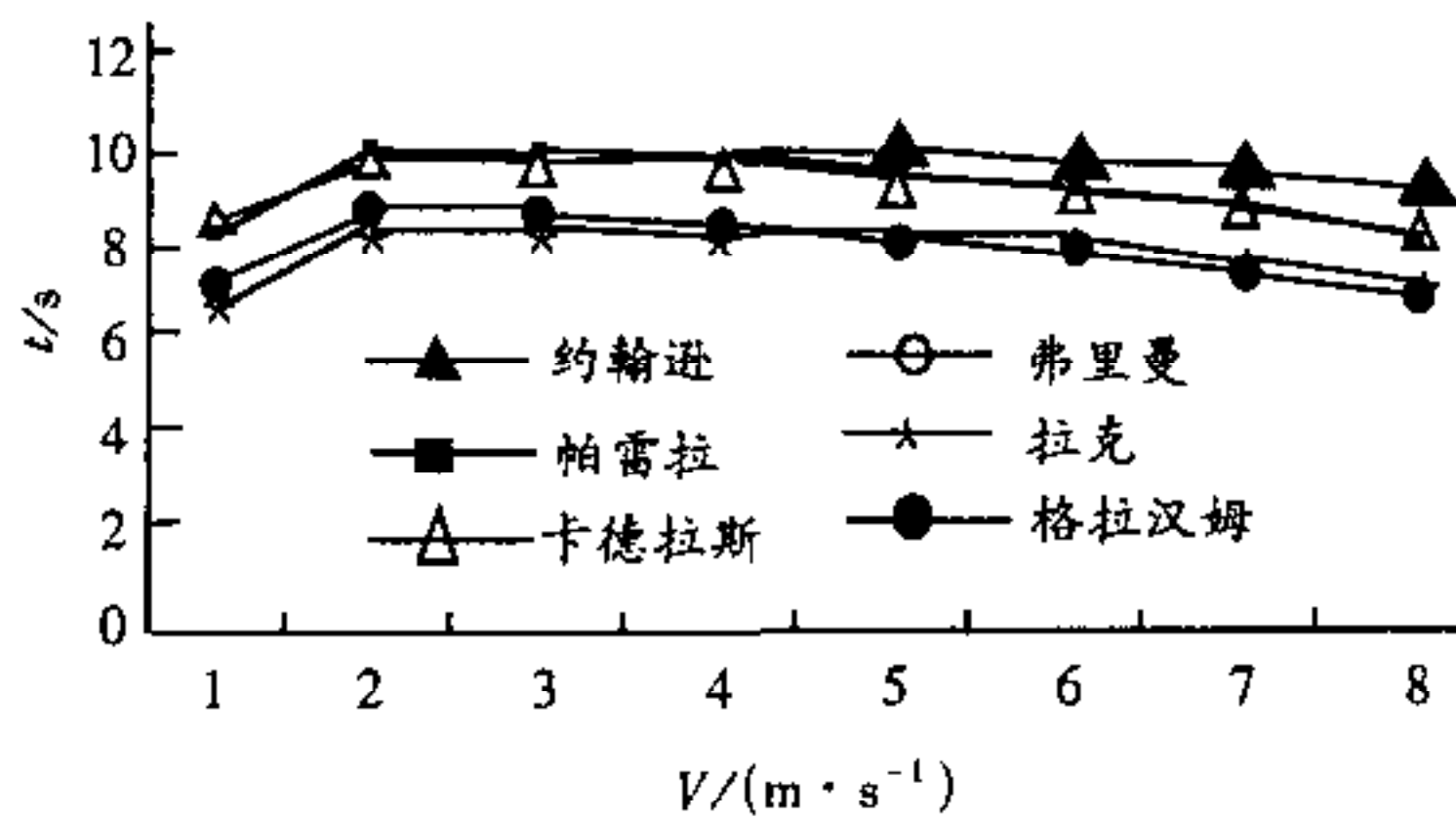


图 1 男女前 3 名运动员  $V-t$  图

实际上我们可以由  $ds/dt = V$  得到  $V$  值,这与我们能看到图 1 中的  $V-t$  吻合的。这里的速度是平均速度,它与运动员的成绩是成正比的。

模型求解与分析:其实就函数本身而言,我们并不能很快(或者不能)得到一个明了的视觉效果,来确定运动员的运动方式。于是我们用男女运动员的速度与时间的关系在 Excel 中画出男女前 3 名运动员的  $V-t$  曲线图。由图 1 可知,6 名运动员几乎都在比赛的前 12 s 左右达到了最大速度。因为

$$\Delta S = \Delta t \times (V_{末} - V_{初})$$

这样可知大概在 65~70 m 处,男子达到最大速度,女子在 55~60 m 处达到最大速度。而在 12~24 s 间,各运动员速度差别甚微,而在 24 s 之后,男子速度开始出现较大的差别,尤其是约翰逊在 24 s 之后始终保持较高的速度,女子在 28 s 之后出现了差别,弗里曼明显领先她之后的两名运动员。根据:

$$dv/dt = a$$

(也即我们通常所说的曲线各点处切线的倾斜程度)可得何时何地加速度最大,何时何地加速为 0,何时何地为负,以及时间各点的大小,可以看到男女运动员都在后一阶段的绝对优势,因此全程平均速度也较大。

### 3 结论

(1)模型一是分析各个因素在 400 m 成绩中的重要性,得出全程平均速度和耐力是最重要的影响因素的结论。

(2)模型二可以预测优秀运动员 400 m 跑的成绩,它能使教练员依据加速度、距离和速度,来判断运动员在 400 m 训练和比赛的任何阶段中有价值的信息。

(3)200 m 段落成绩对 400 m 成绩的影响较大,应充分重视 200 m 段落的练习量和练习强度。

(4)匀加速和较长距离保持较高速度的跑法,是现代 400 m 跑节奏的显著特点。

(5)400 m 成绩与运动员的速度和速度耐力有关,还与速度分段有密切的关系。培养良好的速度感,合理的分配各段速度,才能取得良好的成绩。

以上我们依据世界 400 m 跑优秀运动员的技术,通过两个模型将定性分析转化成为定量分析,模型一的结果,可以用来考察运动员个体训练时各训练内容对运动员成绩的影响。在 400 m 跑中要想获得好成绩,只要将运动员平时训练和比赛的成绩加以分析比较,可得知该运动员的薄弱环节,也可根据优胜者的技术分析重新建模,找出差距,用于指导训练,最大限度地挖掘运动员的各项能力,发挥自己的潜能,取得最好的成绩。

### 参考文献:

[1] 费 罗. 第七届世锦赛短跑项目运动学分析[J]. 田径, 2002(7):23-25.  
 [2] 郑彩壮,周得书. 400 m 跑与其相关各段落成绩关系的探讨[J]. 广州体育学院学报, 2002, 22(2):57-59.  
 [3] 张继辉. 现代男子 400 m 跑运动的多元分析[J]. 武汉体育学院学报, 2003, 37(1):90-91.  
 [4] 姜启源. 数学模型[M]. 北京:高等教育出版社, 1999.  
 [5] Saaty T L, Kearns K P. Analytical planning: the organization of systems[M]//The Analytic Ierarchy Process Series 1991, Vol. 4 Pittsburgh, USA: RWS Publications.  
 [6] Belton V. A comparison of the analytic hierarchy process and a simple multi-attribute value function[J]. European Journal of Operational Research, 1986(26):7-21.

[编辑:周威]